Expresiones algebraicas

Trabajar en **álgebra** consiste en manejar **relaciones numéricas** en las que una o más cantidades son **desconocidas**. Estas cantidades se llaman **variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras**.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las **expresiones algebraicas** nos permiten, por ejemplo, hallar áreas y volúmenes.

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.

Área del cuadrado: $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado.

Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

Expresiones algebraicas comunes

El **doble o duplo** de un número: **2x**

El **triple** de un número: **3x**

El **cuádruplo** de un número: **4x**

La **mitad** de un número: **x/2.**

Un **tercio** de un número: **x/3.**

Un **cuarto** de un número: **x/4.**

Un número es **proporcional** a 2, 3, 4, ...: **2x, 3x, 4x,..**

Un número al **cuadrado**: x^2

Un número al **cubo**: x^3

Dos números **consecutivos**: **x** y **x + 1.**

Dos números **consecutivos pares**: **2x** y **2x + 2.**

Dos números **consecutivos impares**: **2x + 1** y **2x + 3**.

Descomponer 24 **en dos partes**: **x** y **24 − x.**

La **suma** de dos números es 24: **x** y **24 − x.**

La **diferencia** de dos números es 24: **x** y **24 + x.**

El **producto** de dos números es 24: **x** y **24/x.**

El **cociente** de dos números es 24; **x** y **24 · x.**

Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica, para un determinado valor, es el número que se obtiene al sustituir en ésta por valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

$L(r) = 2\pi r$

$r = 5$ cm. $\quad L(5)= 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$S(l) = l^2$

$l = 5$ cm $\quad A(5) = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

$V(a) = a^3$

$a = 5$ cm $\quad V(5) = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

Tipos de expresiones algebraicas

Monomio

Un **monomio** es una **expresión algebraica** formada por **un solo término.**

Binomio

Un **binomio** es una **expresión algebraica** formada por **dos términos.**

Trinomio

Un **trinomio** es una **expresión algebraica** formada por **tres términos.**

Polinomio

Un **polinomio** es una **expresión algebraica** formada por **más de un término.**

Monomios

Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

$2x^2 y^3 z$

Partes de un monomio

Coeficiente

El **coeficiente** del **monomio** es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

Grado

El **grado** de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El grado de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Monomios semejantes

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

$2x^2 y^3 z$ es semejante a $5x^2 y^3 z$

Operaciones con monomios

Suma

Sólo podemos **sumar monomios semejantes**.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$\mathbf{ax^n + bx^n = (a + b)x^n}$

$2x^2 y^3 z + 3x^2 y^3 z = 5x^2 y^3 z$

Si los **monomios no** son **semejantes** se obtiene un **polinomio**.

$2x^2 y^3 + 3x^2 y^3 z$

Producto de un número por un monomio

El **producto de un número por un monomio** es otro **monomio semejante** cuyo **coeficiente** es el **producto del coeficiente** de monomio **por el número**.

$5 \cdot (2x^2 y^3 z) = 10x^2 y^3 z$

Multiplicación de monomios

La **multiplicación de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.**

$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}}$

$(5x^2 y^3 z) \cdot (2 y^2 z^2) = 10 x^2 y^5 z^3$

División de monomios

Sólo se pueden **dividir monomios** con la **misma parte literal** y con el **grado del dividendo mayor o igual** que el **grado** de la variable correspondiente del **divisor**.

La **división de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.**

$\mathbf{ax^n : bx^m = (a : b)x^{n-m}}$

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$$

Si el **grado del divisor es mayor**, obtenemos una **fracción algebraica**.

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^5y^2z^4} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$$

Potencia de un monomio

Para realizar la **potencia de un monomio** se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia.

$\mathbf{(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}}$

$(2x^3)^3 = 2^3 \cdot (x^3)^3 = 8x^9$

$(-3x^2)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 = -27x^6$

Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica de la forma:

$\mathbf{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}$

Siendo $\mathbf{a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_o}$ números, llamados **coeficientes**.

n un número natural.

x la variable o indeterminada.

a_n es el coeficiente principal.

a_o es el término independiente.

Grado de un polinomio

El **grado** de un **polinomio** P(x) es el **mayor exponente** al que se encuentra elevada la **variable** x.

Clasificación de un polinonio según su grado.

Primer grado

$P(x) = 3x + 2$

Segundo grado

$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Tercer grado

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Tipos de polinomios

Polinomio nulo

Es aquel **polinomio** que tiene todos sus coeficientes nulos.

Polinomio completo

Es aquel **polinomio** que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

Polinomio ordenado

Un **polinomio** está **ordenado** si los **monomios** que lo forman están escritos de **mayor a menor grado**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \; ; \; x = 1$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $\quad$ $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1Ordenamos los **polinomios**, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2Agrupamos los **monomios** del **mismo grado**.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3Sumamos los monomios semejantes.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2$ $\quad$ $Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$

$$\begin{array}{ccccc}
7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\
 & 6x^3 & & +8x & +3 \\
\hline
7x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +15x & +5
\end{array}$$

$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro **polinomio** que tiene de **grado** el **mismo** del polinomio y como **coeficientes** el **producto de los coeficientes del polinomio por el número**.

$3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se **multiplica el monomio** por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.

$3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

Multiplicación de polinomios

$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro ***polinomio*** cuyo **grado** es la **suma** de los **grados** de los **polinomios** que se **multiplican**.

También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x \\
 & & & 2x^2 & -3 \\
\cline{3-5}
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x
\end{array}$$

Ejercicio

Efectuar de dos modos distintos la **multiplicación de los polinomios**:

$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - x + 3) =$

$= 6x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 10x^5 - 5x^4 + 15x^3 -$

$- 4x^3 + 2x^2 - 6x + 6x^2 - 3x + 9 =$

$= 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 9x + 9$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3x^4 & +5x^3 & & -2x & +3 \\
 & & & & 2x^2 & -x & +3 \\
\hline
 & & 9x^4 & +15x^3 & & -6x & +9 \\
 & -3x^5 & -5x^4 & & +2x^2 & -3x & \\
6x^6 & +10x^5 & & -4x^3 & +6x^2 & & \\
\hline
6x^6 & +7x^5 & +4x^4 & +11x^3 & +8x^2 & -9x & +9
\end{array}
$$

División de polinomios

Resolver la división de polinomios:

$P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\qquad$ $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$
\begin{array}{llll|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x-8 \quad & x^2-2x+1 \\
\cline{6-6}
\end{array}
$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\
\cline{6-6}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & x^3 \\
\cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x-8 &
\end{array}
$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\,x^2$

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\
\cline{6-6}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & x^3+2x^2 \\
\cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x-8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x-8 &
\end{array}
$$

Procedemos igual que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x \\
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & \underline{-8x^2} & \underline{+16x} & \underline{-8} & \\
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

$10x - 6$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

$x^3 + 2x^2 + 5x + 8$ es el **cociente**.

Regla de Ruffini

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableción un método más breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma x — a**.

Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división:

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

2Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

3Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.

4Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

5Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

6Sumamos los dos coeficientes.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

7Repetimos el proceso anterior.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

Volvemos a repetir el proceso.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \end{array}$$

Volvemos a repetir.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 56 \end{array}$$

8El último número obtenido, 56 , es el resto.

9El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Ejemplo

Dividir por la regla de Ruffini:

$(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	- 32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

$R = 0$

Identidades notables

Binomio al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Suma por diferencia

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Binomio al cubo

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x − a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.

Calcular por el teorema del resto el resto de la división:

P(x) : Q(x)

$P(x)= x^4 - 3x^2 + 2$ $\quad$ $Q(x) = x - 3$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**

Raíces de un polinomio

Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x − a) si y sólo si P(x = a) = 0.

Al valor **x = a** se le llama **raíz** o **cero** de P(x).

Raíces de un polinomio

Son los valores que anulan el polinomio.

Calcular las raíces del polinomio:

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

x = 2 y x = 3 son raíces o ceros del polinomio: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, porque **P(2) = 0 y P(3) = 0.**

Propiedades de las raíces y factores de un polinomio

1Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.

2A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x − a).

3 Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo (x — a), que se correspondan a las raíces, x = a, que se obtengan.

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

4La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.

5Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.

$x^2 + x = x \cdot (x + 1)$

Raíces: $x = 0$ y $x = -1$

6Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

$P(x) = x^2 + x + 1$

Hallar las raíces y descomponer en factores el polinomio:

$Q(x) = x^2 - x - 6$

Los divisores del término independiente son: ±1, ±2, ±3.

$Q(1) = 1^2 - 1 - 6 \neq 0$

$Q(-1) = (-1)^2 - (-1) - 6 \neq 0$

$Q(2) = 2^2 - 2 - 6 \neq 0$

$Q(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 +2 +6 = 0$

$Q(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

Las raíces son: **$x= -2$ y $x = 3$.**

$Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 3)$

Factorización de un polinomio: métodos

Sacar factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.

$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a (b + c + d)$

Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces

1 $x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)$

La **raíces** son: $x = 0$ y $x = -1$

2 $2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$

Sólo tiene una **raíz** $X = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3 $x^2 - ax - bx + ab = x (x - a) - b (x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$

La **raíces** son x = a y x = b.

Descomponer en factores y hallar las raíces

1 $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces son x = −2 y x = 2

2 $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son x = − 2 y x = 2

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2$

Descomponer en factores los trinomios cuadrados perfectos y hallar sus raíces

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$$

La raíz es x = −3, y se dice que es una **raíz doble**.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 2 \quad 2^2$$

La raíz es x = 2.

Trinomio de segundo grado

Para **descomponer en factores el trinomio de segundo grado** $P(x) = ax^2 + bx + c$, **se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado**. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Descomponer en factores los trinomios de segundo grado y hallar sus raíces

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = 2.

$x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = − 2.

Descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces

$x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = t$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

$x^4 - 2x^2 + 3$

$x^2 = t$

$t^2 - 2t + 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

Descomposición de un polinomio de grado superior a dos y cálculo de sus raíces

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3Dividimos por Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

4Por ser la división exacta, D = d · c .

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Una raíz es x = 1.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es $x = -1$.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por −1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio.

$2x - 3 = 2 (x - 3/2)$

La **factorización del polinomio** queda:

$\mathbf{P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2 (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)}$

Las raíces son : $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad y \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

$$\frac{x+2}{x^2-4} \quad y \quad \frac{1}{x-2}$$

son **equivalentes** porque:

(x+2) · (x+2) = $x^2 - 4$

Dada una fracción algebraica, **si multiplicamos el numerador y el denominador** de dicha fracción **por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot M(x)}{Q(x)\cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x):M(x)}{Q(x):M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.**

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Amplificación de fracciones algebraicas

Para **amplificar** una **fracción algebraica** se **multiplica** el **numerador** y el **denominador** de la fracción por un **polinomio**.

$$\frac{(x+2)}{(x-2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Dadas dos **fracciones algebraicas**, reducirlas a común denominador **es encontrar** dos f**racciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador.**

Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{x}{x^2-1} \quad y \quad \frac{1}{x^2+3x+2}$$

1Descomponemos los denominadores en factores para hallarles el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.

$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

$x^2 + 3x + 2 = (x +1) \cdot (x + 2)$

m.c.m. $(x^2 - 1, x^2 + 3x + 2) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

2Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)} = (x+2)$$

$$\frac{x\cdot\ (x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+2x}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)} = (x-1)$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{(x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$$

Suma de fracciones algebraicas

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

Sumar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-x}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x^2-5x+6} =$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - (x+3)}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - x - 3}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Fracciones algebraicas con distinto denominador

En primer lugar se ponen las fracciones algebraicas a común denominador, posteriormente se suman los numeradores.

Sumar las fracciones algebraicas:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1)$$

$$\text{m.c.m.}\left(x+1,\ x^2-1,\ x-1\right) = (x+1)\cdot(x-1)$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - (x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - x - 1}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{2x - 2}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} \quad = \frac{2}{(x+1)}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

Multiplicar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-2x\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\cdot\left(x^2-4\right)}=$$

$$=\frac{x\left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)^2}{\left(x-2\right)\cdot\left(x-3\right)\cdot\left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)}=$$

$$=\frac{x\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)\cdot\left(x-3\right)}$$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica con numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y con denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

Dividir las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=$$

$$=\frac{\left(x^2+2x\right)\cdot\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)}=$$

$$=\frac{x\left(x+2\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\cdot\left(x-3\right)\cdot\left(x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{x}{x-3}$$